Rapport

YU Shang-Chun

31 Mai 2018

1 Introduction

Le 6 avril, j'ai effectué un stage de diffusion organisé par MathàLyon, avec trois autres camarades de classe et plusieurs intervenants dont des chercheurs de l'UMPA et de Lyon 1. Ce stage a eu lieu au collège Gabriel Rosset à Lyon 7e, et on a accueilli des classes de 3e à 6e, heure par heure, dans deux salles où des ateliers variés étaient installés. Dans la matinée, les classes que l'on a accueillies sont de 3e à 6e, et dans l'après-midi, que des classes de 6e.

Les ateliers dans cette diffusion sont créés à partir de l'exposition internationale « Pourquoi les mathématiques » soutenue par l'UNESCO, lancée en 2004. Le but est de faire chercher, donc pas que les élèves partent avec des solutions. Cependant, il doit y avoir un but plus profond de cette diffusion, et je reviens sur ce point à la fin de ce rapport.

2 Présentation de quelques ateliers

Dans cette diffusion, il y avait beaucoup d'ateliers de types différents. Pour les informations de ces ateliers, nous pouvons trouver le document qui les explique tous, fourni par MathàLyon.

Je vais donc présenter deux ateliers en détail, et décrire mes observations au cours du stage.

2.1 Carré + carré = carré

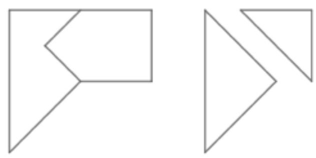
Le but de cet atelier est de construire d'abord un carré avec toutes les pièces sauf le carré, ensuite construire un carré avec toutes les pièces.

Dans le document qui explique tous les ateliers, on s'attend à ce que la première tâche soit facile pour les élèves, donc le défi est plutôt d'accomplir la seconde tâche. Connaître la longueur du côté du grand carré est essentiel dans ce puzzle, et c'est par le théorème de Pythagore que l'on peut trouver cette longueur facilement. En pratique, il se trouve que cette longueur est à peu près la largeur d'une feuille A4.

Les mathématiques derrière cet atelier sont évidemment le théorème de Pythagore.

Observations

Bien que l'on s'attende à ce que la première tâche soit réussie sans difficulté, en réalité elle est déjà assez difficile pour la plupart des élèves. J'ai vu seulement deux trois personnes qui ont fini ce puzzle dans un temps « raisonnable », les autres ont cherché pendant trop longtemps mais en vaine. Ce qui m'a perturbé est le fait que beaucoup ont été bloqués lorsqu'il restait seulement les deux pièces comme indiqué sur le dessin ci-dessous.



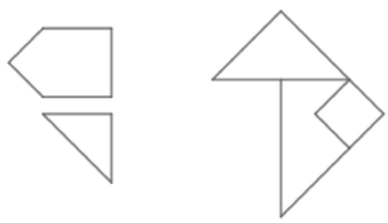
Beaucoup d'élèves ont été bloqués lorsqu'il restait ces deux pièces

Même si je leur ai indiqué que les deux pièces assemblées étaient bonnes, c.-à-d. qu'il suffisait de mettre les deux autres pièces à la bonne place, cela pouvait leur prendre plus de 5 minutes même plus de 10 minutes pour trouver la bonne réponse.

Ensuite pour le deuxième puzzle, j'ai toujours laissé chercher les élèves pendant quelques minutes. Il se trouve que personne n'a pensé à la longueur du côté du nouveau carré : soit ils ont gardé la même longueur pour le côté, soit ils ont cherché la solution aléatoirement. Donc je leur ai dit que le côté du carré à construire devais être plus long que celui dans la première tâche. Et à ce point, encore une chose perturbante : il y avait beaucoup d'élèves qui cherchait encore à construire le carré sans changer la longueur du côté, notamment des petits (de 6e). Je ne comprends pas pourquoi ils ont continué à faire cela même si j'ai dit de manière explicite que le côté devait être plus long, d'autant plus qu'ils ont compris et étaient d'accord.

Après avoir donné une indication sur la longueur du côté du nouveau carré (qui devait être plus longue) et laissé les élèves chercher la solution, j'ai énoncé le mot-clé « théorème de Pythagore » ainsi que ce que ce théorème dit, au cas où les élèves oublieraient. Seule une fille a compris comment utiliser ce théorème pour trouver la longueur du côté du carré immédiatement après que j'ai dit les mots « théorème de Pythagore », bravo à elle ! Les autres, parmi les grands (de 3e ou 4e), connaissent en général le théorème et ont été sur le bon chemin dès que j'ai montré comment trouver le côté du grand carré. Néanmoins, parmi les petits (de 6e), ce théorème n'est en général pas acquis, il m'a donc fallu expliquer le théorème de Pythagore. C'était bien ce que j'ai pensé, mais voici ce qui m'a vraiment surpris. Les élèves de 6e ne connaissent pas le volume ou l'aire d'un objet géométrique simple, ni l'utilisation de variables muettes dans les expressions mathématiques (je vais détailler ces points à la fin du rapport). Sans pouvoir faire ces mathématiques, je leur ai donné directement la longueur du côté du carré à l'aide de la feuille A4 disponible sur la table.

Revenons au seconde puzzle. J'ai remarqué que la plupart des élèves ont été bloqués lorsqu'il restait seulement les deux pièces :



La plupart des élèves ont été bloqués lorsqu'il restait seulement ces deux pièces

Mais avec un peu de temps, ils sont tous parvenus à trouver la solution, et débordaient de joie. Et c'était ce que j'ai dit à beaucoup d'élèves lorsqu'ils ont été bloqués et perdu patience ou été frustrés : « Les mathématiques ne sont pas toujours simples. Les mathématicien.nes recherchent des réponses d'une ou plusieurs questions et parfois sans même savoir s'il y en a une. Le processus de recherche peut tout à fait être long, frustrant, et pénible, mais c'est aussi parce que c'est tellement pénible qu'il y a cette joie, cette jubilation lorsque l'on trouve finalement la réponse. » Moi, je pense que si cet atelier ne transmet pas beaucoup de connaissances ou pensées mathématiques, au moins on peut faire comprendre comment notre coeur se remplit de joie après une longue recherche, ce qui est souvent une des motivations pour faire des mathématiques. D'ailleurs, pour les petits, je crois qu'ils ont gardé le théorème de Pythagore à l'esprit après avoir joué à ces puzzles.

2.2 Théorème des quatre couleurs

Le but de cet atelier est de placer un jeton sur chaque pays sur une carte de l'Afrique, de sorte que deux pays voisins aient des jetons de couleurs différentes. Ces jetons simulent un coloriage de la carte. On essaye de réduire ou limiter le nombre des couleurs utilisées, et on doit trouver que deux seules, ou trois seules couleurs ne sont pas suffisantes.

Les mathématiques derrière cet atelier sont le théorème des quatre couleurs. On observe qu'il faut au moins quatre couleurs pour le coloriage, et le théorème confirme que quatre couleurs suffisent, quel que soit la carte. Le théorème a été démontré avec un ordinateur, en examinant plus de mille configurations fondamentales. On peut trouver plus d'histoires dans le document fourni par MathàLyon.

Observations

J'ai trouvé que l'on peut introduire cet atelier de plusieurs façons différentes. On peut le présenter comme une compétition en disant que la personne qui ne peut plus mettre un jeton en respectant la règle perd, et on peut ne rien demander sur le nombre des couleurs utilisées au début puis demander d'utiliser seulement trois couleurs. Le souci ici est que les élèves peuvent disperser des jetons partout sur la carte, et on perd non seulement du temps mais aussi le but de cet atelier, donc il vaut mieux restreindre la région où l'on peut mettre des jetons. Par exemple, on peut se limiter autour de la région entourée dans la figure ci-dessous.

Les pays dans le cercle bleu montrent que le 3-coloriage n'est pas possible.

En fait, les élèves vont ainsi remarquer une astuce pour gagner ce jeu (avec éventuellement nos aides), puisque la Tanzanie, le Malawi, la Zambie et le Mozambique montre l'impossibilité du 3-coloriage. Ensuite, il est temps de présenter le théorème en leur disant qu'il est toujours possible de jouer sans que personne ne perde avec quatre couleurs, quel que soit la carte. On termine par des histoires derrière ce théorème puis on laisse les élèves jouer avec 4 couleurs sans que personne ne perde.

Ou bien pour les petits, j'ai introduit cet atelier en inventant une histoire : on voudrait colorier la carte de géographie, et il faudrait donc des pigments (on utilise des jetons à la place). Pourtant les pigments sont très chers et on est assez pauvre(s), il vaudrait mieux donc réduire le nombre des couleurs utilisées. Ensuite, avec un peu de guides (cf le dessin ci-dessus), les élèves voient que le 3-coloriage n'est pas réalisable. Finalement on présente le théorème qui dit que le 4-coloriage est faisable. (Donc on réussit à économiser de l'argent !)

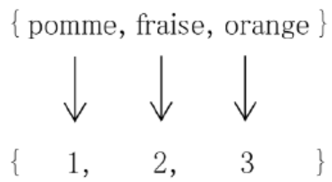
3 Un sujet intéressant pour les collégien.nes ou lycéen.nes

Je propose un sujet mathématique dans cette partie pour la diffusion aux collèges/lycées.

Pour les collégien.nes et lycéen.nes, je pense que la dénombrabilité peut être un sujet intéressant. Si l'on veut parler de mathématiques intéressantes et/mais on ne veut pas parler des choses en mathématiques élémentaires (comme calculer la sommes des carrés), ni des choses que l'on ne fait que raconter ou énoncer (comme le théorème de quatre couleurs), ni des choses abstraites pour rien (comme la structure de groupes, qui est intéressante et accessible aux jeunes mais ils ne voient pas d'utilité ou de surprises), alors la dénombrabilité est un candidat parfait.

J'explique brièvement comment on peut présenter cette notion. Le but final est de montrer que l'ensemble des entiers naturels est équipotent à celui des entiers naturels pair, c.-à-d. qu'il y a autant d'entiers naturels que d'entiers naturels pair. C'est un résultat étonnant parce que l'on a l'impression que le premier a deux fois plus d'éléments que le second.

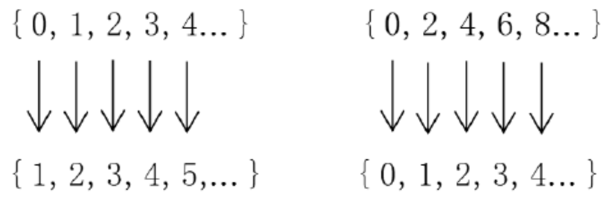
Considérons les ensembles finis dans un premier temps. On commence à leur demander la taille d'un ensemble fini, par exemple on demande la taille de l'ensemble {pomme, fraise, orange}. Puis on leur demande pourquoi la réponse est 3, et après un peu de discussions, on leur dit que c'est en fait parce que l'on a fait une bijection entre cet ensemble et l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ qui possède 3 éléments comme définition.



Le mécanisme derrière, lorsque l'on compte, est en fait réaliser une bijection avec $\{1, ..., n\}$

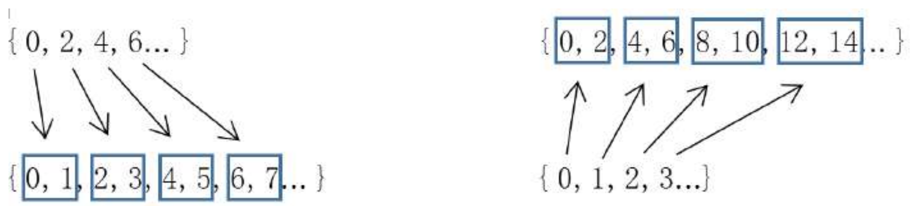
Ici, le but est de leur montrer que compter est en fait construit une bijection, et bien sûr que l'on explique la notion de « bijection » sans dire le mot (on peut très bien utiliser ce mot, mais sans faire peur). En même temps on peut introduire la notion d'injection et de surjection en leur demandant pourquoi on voit qu'un tel ensemble est plus grand qu'un tel ensemble. Ces notions sont introduites de manière convaincante avec des exemples que l'on comprend très bien, donc ce mécanisme de comparer la « cardinalité » de deux ensembles doit entrer dans leur esprit.

On peut finalement manipuler des ensembles infinis. On montre que $\mathbb{N}$ possède autant d'éléments que $\mathbb{N}^*$, c.-à-d. que $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents : ce qui paraît très étrange puisque l'on a l'impression que $\mathbb{N}$ a un élément de plus que $\mathbb{N}^*$ (cette phrase n'est pas fausse de plus). Pour montrer cela, il faut construire une bijection et expliquer l'idée d'équipotence avec soin, et c'est ici que l'on voit que ce que l'on vient de faire dans le cas fini est important, puisque si l'on a bien fait entrer dans leur esprit le mécanisme de comparer la taille d'ensembles, ils doivent être convaincus ici. De même, on peut montrer que $2\mathbb{N}$ possède autant d'éléments que $\mathbb{N}$, c.-à-d. que $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents, même si l'on a l'impression que $2\mathbb{N}$ a deux fois moins d'éléments que $\mathbb{N}$ a. Et c'est le but final de cet atelier.



La visualisation de deux bijections en question.

Mais ce n'est pas la fin de cet atelier. Pour qu'il n'y ait aucun doute laissé chez les auditeurs, il faut parler de la raison pour laquelle on a l'impression qu'il y a deux fois plus d'éléments dans $\mathbb{N}$ que dans $2\mathbb{N}$. En général, c'est parce que l'on construit dans notre tête une bijection entre $2\mathbb{N}$ et l'ensemble de paquets de taille 2 de $\mathbb{N}$, comme indiqué dans la figure gauche ci-dessous.



La visualisation de deux arguments plausibles mais faux.

Il serait encore mieux que des élèvent signalent ce point qui semble convainquant et donc paradoxal avec ce que l'on a montré. En fait, il suffit de dire qu'avec le même genre d'argument, on montre qu'il y a deux fois plus d'éléments dans $2\mathbb{N}$ que dans $\mathbb{N}$, donc l'argument utilisé ici est fragile. On peut continuer à montrer que l'argument mathématique est en revanche solide : s'il existe une bijection entre les ensembles A et B, et une bijection entre les ensembles B et C, alors il existe une bijection entre les ensembles A et C (facile).

Pour aller plus loin, on peut montrer la dénombrabilité de quelques ensembles classiques comme $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ ou la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$. On peut aussi raconter la solidité de la notion de la cardinalité, i.e. si l'un ensemble A s'injecte dans B et B s'injecte dans A, alors A et B sont équipotents.

C'est vrai que ce sujet est un peu abstrait, mais il y a beaucoup de surprises dedans. Certains résultats sont contre-intuitifs mais au même temps on est entièrement convaincus (pour cela, il faut bien expliquer toutes les choses, avoir seulement une idée floue peut être dangereuse.) J'avais montré cela à plusieurs lycéens et collégiens à Taïwan, et on a toujours aimé cette histoire folle de l'équipotence entre l'ensemble des entiers naturels pairs et l'ensemble des entiers naturels !

4 Critiques et réflexions

Dans ma journée au collège Gabriel Rosset, la plupart des classes sont de 6e (quatre classes de 6e, deux en 3e et une de 4e). Bien que les élèves de 6e soient en général plus sages, ils connaissent beaucoup moins de choses, ce qui rend les explications mathématiques difficiles. Par exemple, ce qui m'a surpris, c'est que lorsque j'ai expliqué le théorème de Pythagore à deux élèves de 6e avec un dessin, elles m'ont demandé ce que signifiait a^2. Après avoir compris qu'elles ne comprennent pas les expressions mathématiques avec des lettres par manque de notion de variable muette, j'ai commencé à illustrer mon dessin avec des données concrètes. Néanmoins cela m'a conduit à une autre grande surprise : la notion d'aire/volume d'objets géométriques simples n'est pas encore acquise au 6e. Lorsque je leur ai demandé quelle était l'aire d'un carré de côté 2 cm, elles n'arrivaient pas à répondre 4 cm^2, non plus pour l'aire d'un rectangle ou d'un triangle.

J'avais beaucoup réfléchi sur le but de ce genre de diffusion à des collègien.nes, pourtant cela relève des questions plus fondamentales. Venant de Taïwan, pays qui est toujours parmi les cinq meilleurs en mathématiques (élémentaires) au monde depuis 2006 selon des études du PISA, j'ai constaté d'abord en classe préparatoire que le niveau en mathématiques élémentaires en France est (très) bas par rapport à chez moi. (Par exemple, la notion d'aire/volume d'objets géométriques simples est acquise au CM2 à Taïwan.) Certes, ce résultat a été déduit de mes observations personnelles portant seulement sur une infime portion de la population donc pouvait être très subjectif et même faux, mais en cherchant des études un peu plus crédibles, la réalité n'est en fait pas très loin de mes impressions.

C'est donc évidemment un problème d'éducation scolaire ou de la société. Il serait donc ridicule de penser que la diffusion a pour but d'augmenter le niveau moyen en mathématiques élémentaires puisqu'elle n'est pas du tout un remède radical. Mais si l'on pousse la réflexion un peu plus loin en demandant à quoi sert un meilleur niveau moyen en mathématiques élémentaires en France si la France a un très bon niveau en mathématiques avancées, alors je donne ma langue au chat... Bien sûr que l'on peut dire que cela permet d'avoir éventuellement plus de personnes qui entrent dans le monde mathématique, c.-à-d. deviennent chercheur.ses, mais je pense que les chercheur.ses en mathématiques en France viennent en grande partie de classes préparatoires et de grandes écoles, et ce groupe de personnes est plutôt indépendant du niveau moyen en mathématiques élémentaires en France. (Je reviens sur ce point après). Ceci dit, dans d'autres pays, je pourrais répondre à cette question plus facilement car il serait bien d'augmenter le niveau moyen en mathématiques élémentaires pour que l'on ait plus de chances d'avoir des chercheur.ses en mathématiques, mais en France ce n'est pas le cas. On pourrait dire qu'augmenter le niveau moyen en mathématiques élémentaires n'est pas seulement pour avoir plus de chances d'avoir des chercheur.ses en mathématiques, mais aussi pour les domaines de l'ingénierie, de la finance, et des autres sciences fondamentales. Pourtant cela revient au même, puisqu'il n'y a non seulement les classes préparatoires scientifiques, mais aussi économiques et commerciales, ou bien les Sciences PO etc. En résumé, je rejette l'idée que cette diffusion est pour augmenter le niveau moyen en mathématiques élémentaires.

Ensuite, je ne pense pas que cette diffusion soit une vulgarisation. Un argument essentiel pour moi est que ce que l'on fait dans cette diffusion n'est pas des mathématiques difficiles, et surtout que la plupart des ateliers peuvent se faire à l'école, dans la classe, par leur propre instituteur.se. Et si l'on dit que l'on peut leur faire découvrir des choses intéressantes comme dans cette diffusion, alors d'après moi, on peut aussi le faire à l'école, dans la classe, par leur propre instituteur.se.

Donc peut-être ce sont les interactions directes avec des chercheur.ses en mathématiques qui sont vraiment à apprécier. Mais si l'on pense que ces interactions ont pour but de leur faire connaître mieux les mathématicien.nes et ce qu'ils font, ainsi que d'avoir plus de chances d'avoir des chercheur.ses en mathématiques, alors on revient au sujet précédent. Il faut donc penser que ces interactions ont pour but de leur faire connaître mieux les mathématicien.nes et ce qu'ils font, ainsi que d'avoir plus de chances de changer des stéréotypes sur les mathématiques et les mathématicien.nes. Je vais expliquer ce point tout de suite, mais je résume d'abord ce que j'ai dit plus haut.

Comme j'ai mentionné, je pense que c'est le système des CPGE et des concours qui fournit un nombre stable des mathématicien.nes ou scientifiques et qui permet à la France d'avoir un bon niveau en mathématiques avancées. Donc « on veut intéresser des gens aux mathématiques ou juste les inspirer via cette diffusion, afin d'attirer plus de gens dans ce domaine », je pense que cette idée est non nécessaire. D'après moi, la situation dans le monde mathématique en France ne changerait pas beaucoup avec ces diffusions puisque le système des CPGE y est trop important. Mais une chose dont nous devons nous inquiéter est la répartition inégalitaire des sexes dans les métiers scientifiques. Il y a beaucoup moins de femmes dans le monde mathématique (même dans ma promotion : dans le département, il n'y a qu'à peu près cinq filles !). Je ne suis pas convaincu que les filles soient globalement et naturellement mauvaises en mathématiques, et je pense que c'est un problème de la société (les effets des stéréotypes etc) et éventuellement les politiques dans les formations professionnelles, c.-à-d. le manque de mesures qui attirent les filles ou/et d'environnement qui les rassurent... Il faudrait peut-être non seulement changer les stéréotypes sur le métier des mathématiques, mais aussi améliorer les conditions de travail ou de formation en mathématiques. Bien sûr, le second point n'est jamais évident, puisque le monde des mathématiques est encore dominé par les hommes. Même si les hommes pensent à la place des femmes, on peut éventuellement négliger des points qui sont importantes dans leurs formations et leurs travails.

En résumé, je pense que ce sujet de la répartition inégalitaire des sexes est plus important que penser à améliorer ces ateliers ou ces diffusions aux jeunes en France (bien sûr, je ne dis pas que les diffusions n'ont pas d'importance), mais on peut éventuellement traiter ces deux choses en même temps : on peut essayer d'organiser les ateliers dans le but d'améliorer l'inégalité des sexes (non seulement faire découvrir les mathématiques intéressantes), et je pense que c'est un point souvent négligé dans l'organisation de ces ateliers ou diffusions.

Finalement, on peut penser à la signification de cette diffusion d'une autre façon totalement différente. Jusqu'à présent, on a seulement pensé à ce que l'on peut changer chez les jeunes (les collégien.nes, lycéen.nes), mais pas chez nous. En effet, peut-être un objectif important de ce stage n'est pas focalisé sur d'autres personnes, mais sur nous-même, qui donnons ces diffusions. Via ces ateliers, on peut voir où les élèves ont des difficultés et quels sont les arguments difficiles pour eux à comprendre. C'est une occasion de pratiquer de la pédagogie, de trouver la meilleure façon d'expliquer une théorie ou un phénomène, puisque l'on peut avoir des « feedbacks » vis-à-vis/directement. C'est une qualité importante dans le monde mathématique, par exemple il serait dommage qu'un professeur qui connaît beaucoup de choses explique mal un cours telle que les étudiants ne le comprennent pas bien. (De plus, cela arrive souvent lorsque l'enseignant.e ne connaît pas ce que les étudiant.es ont acquis et ce qui ne l'est pas encore.) Donc je pense qu'il serait bien de garder en tête cette idée que cette diffusion a non seulement des effets sur d'autres personnes mais aussi des effets sur nous-même.